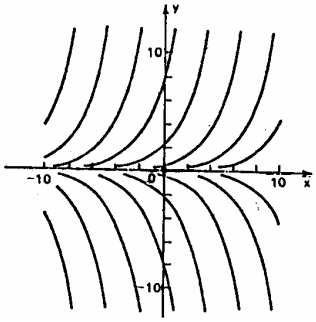
单元 12: 一阶微分方程及其应用

特定目标：

1. 学习解某些特定一阶微分方程技巧。
2. 在实际的情况下应用有关建立及解一阶微分方程的技巧。
3. 能够理解一阶微分方程的解。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
12.1 基本概念	3	教师可利用如 $\frac{dy}{dx}=x^2$ 及 $\frac{d^2y}{dx^2}=x^3$ 的简单例子引进微分方程(即含有微分系数的方程) 的一般概念，并让学生求出这些方程的解，由于这些方程可以简单的积分法求解，所以学生应该没有任何困难。 (第一个方程的解可积 x^2 一次求出，而第二个方程则须积 x^3 两次。) 可是，对于方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}+y=0$ 来说又如何呢 ？ 为引起学生的兴趣，教师可引进术语「常微分方程」，但由于在本范畴的范围内只考虑一个自变量，故此可将它简称为微分方程。 学生亦应该知道微分方程的术语：阶、次数、线性及非线性。教师应利用实例来说明不同的概念。 教师可以透过例子清楚说明微分方程的解的意义。例如，$f(x)=e^{2x}$ 是方程 $\frac{dy}{dx}-2y=0$ 的解 (因为 $f'(x)-2f(x)=0$)。 「任意常数」、「一般解」及「特解」是本范畴的基本概念；特别地，学生应知道任何不含有 n 个任意常数的 n 阶方程的解并非其一般解，而符合某些初值条件或边界条件的解则称为特解。这些概念可透过图像进一步加以阐明。例如，方程 $\frac{dy}{dx}-2y=0$ 的一般解 $y=ce^{2x}$ 可用下图的曲线族来表示，而其特解 $y=e^{2x}$ (或者 $y=2e^{2x}$ 等) 只是曲线族内其中一条曲线。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
		 学生亦应能识别函数内任意常数的数目。例如，函数 $c_1e^{c_2+x}$ 似乎含有两个任意常数，但事实上由于 $c_1e^{c_2+x}=(c_1e^{c_2})e^x=ce^x$，其中 $c_1e^{c_2}$ 可由一个任意常数 c 所取代，所以最终只有一个任意常数。对于能力较佳的学生，教师亦可与他们讨论方程的奇解。例如，在方程 $y\frac{dy}{dx}=x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1$ 中，$y=cx+\frac{1}{c}$ 是一般解而 $y^2=4x$ 则是特解。
12.2 微分方程的建立	2	本节的重点在于怎样由实际情况建立微分方程，至于求解所建立的方程则可留待以后的章节。教师可提供学生一些例子，指示他们应有的步骤。一个典形的例子就是生物增长的问题：某一品种的生物个数在时间 t 的增长率，$\frac{dP}{dt}$ 与当时的 P 的数值成正比。学生应能写出关系式 $\frac{dP}{dt}\propto P$ 或 $\frac{dP}{dt}=kP$，其中 k，称为增长常数，是一正常数。
12.3 可分变量微分方程的解	4	学生应能辨认出可分变量的微分方程，并将方程写成 $g(y)\,dy=f(x)\,dx$ 的形式，之后，学生应毫无困难地利用简单积分法求解有关方程。在真实的应用里，一般来说，微分方程的一般解并不特别重要，反之，符合特定的初值条件的特解显得较为有用，所以教师应提供学生更多初值问题。 在现实的生活里有很多例子皆可导致可分变量的一阶微分方程，以下是其中一部分。

内容	时间分配	教学建议
		1. *人口增长* 某种生物的个数由于移居关系每年减少 n，同时由于该生物的出生与死亡，每年的自然增长率为现年个数的 $\lambda\%$，若起初的个数为 N，则 t 年后的个数 x 可由 $\frac{dx}{dt}=\frac{\lambda}{100}x-n$ 得出。 2. *指数衰变* 某放射性物质的衰变率正比于时间 t 时所余质量 $x(t)$，由此可得 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-\mu x$ 其中 μ 是一正数。 3. *冷却定律* 某物体被放置于温度为 θ 的环境中，其温度变化率正比于物体的温度与 θ 的差。若时间 t 时物体的温度为 T，则 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=k(T-\theta)$，其中 $k<0$。 4. *扩散* 某能渗透的罐载有浓度为 x mgcm^{-3} 的溶液，它被置于载有相同溶液但浓度较高 (c mgcm^{-3}) 的大容器中；由于扩散关系，罐内溶液的浓度会续渐增加。若 c 是常数，罐内溶液的浓度增加率与浓度差成正比。因此，x 必满足微分方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(c-x)$，其中 k 为一正常数。 5. *蒸发作用* 一湿而有气孔的物质的水份散失率与当时的含水量 $x(t)$ 成正比，由此可得方程式 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-kx$，其中 k 是正常数。 6. *化学反应* 若温度不变，则化学反应的速度正比于各反应物质的浓度之积。如两反应物质原本的质量分别为 a 及 b，而 x 代表所生成物质的质量，则 x 必满足方程 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=k(a-x)(b-x)$，其中 k 是正常数。

内容	时间分配	教学建议
12.4 线性微分方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 的解	4	7. *改良的人口增长定律* 这是一个利用微分方程 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=aN-bN^2$ 加以改良的人口模式，其中 aN 是出生率，$-bN^2$ 是死亡率，而 N 是当时的人口个数。这里，a 及 b 都是正常数。 8. *细菌的传播* 这里考虑方程式 $\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=kN(P-N)$，其中 N 是时间 t 时受细菌感染的人口个数，而 P 是可能受到感染的总人口个数，并假定 N 的变化率正比于 N 及 $P-N$ 的积。 在以上例子中，教师除了引导学生建立及解微分方程外，亦应着重其解的理解。 对于能化简为线性形式 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+p(x)y=q(x)$ 的方程，可利用积分因子求解。教师应强调由于这是一阶方程，其解只有一个任意常数，所以积分因子 $e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}$ 也不应有积分常数，而事实上 $p(x)$ 的任一原函数都能达到其目的。由经验所得，学生很容易忘记积分因子的形式，有些学生并且会将 $e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x}+c$ 视为上述方程的解，因此，教师应给予学生充分的练习以保证学生能掌握这技巧。 能产生一阶线性微分方程的实际例子都应予以推荐。以下是两个例子。 1. *混合物* . 一箱内有 100 L 的溶液，其中溶 10 kg 的化合物。浓度为每升 2 kg 的溶液以每分钟 5 L 的速度流入箱内。箱内的混合物于搅匀后以每分钟 4 L 的速度流出。若箱内的化合物的质量是 x kg，则 x 必满足微分方程 $\frac{dx}{dt}+\frac{4x}{100+t}=10$ 及当 t = 0 时 x = 10 的初值条件。 2. *连锁化应* 放射性元素 X 衰变为放射性元素 Y，而 Y 衰变为元素 Z。在时间 t 时，X、Y 及 Z 的质量 (顺序地记为 x、y 及 z) 和是常数。当 $t=0$ 时 $x=M$ 及 $y=z=0$，则相应的微分方程是 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-k_1x$ 及 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=k_1x-k_2y$。由第一个方程得出 $x=Me^{-k_1t}$，而第二个方程经代入 x 后则变为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+k_2y=k_1Me^{-k_1t}$。

内 容		时 间 分 配	教 学 建 议
12.5	**可化简为可分变量或线性形式方程的解**	4	学生应能利用指定的公式将微分方程化简为上述任何一种的方程形式。例如，伯努利方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n$，$n\neq 0$，$n\neq 1$，可代入公式 $u=y^{1-n}$ 将它化简为一线性方程，而黎卡提微分方程 $\frac{dy}{dx}+P(x)y+Q(x)y^2=R(x)$ 则可代入公式 $y=Y+\frac{1}{u}$ 将之化简为一线性方程，其中 Y 是已知的解（即特解 Y 为已知）。
		17	