单元 21：统计推论

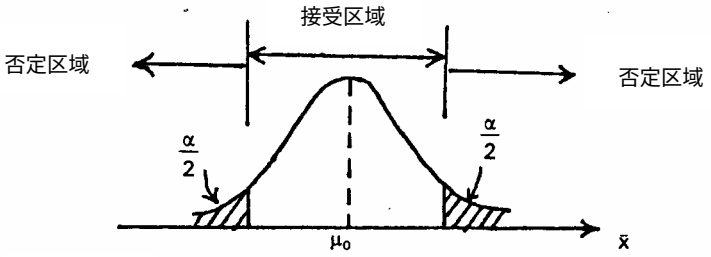
特定目标：

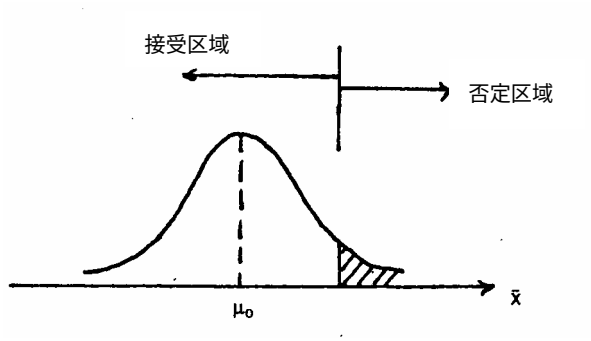
1. 从一随机样本中估计总体的平均值。
2. 认识一已知方差的常态分布的总体平均值的置信区间。
3. 认识 I 型及 II 型误差。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
21.1 基本概念	4	教师须介绍以下名词：总体、样本、随机样本、总体参数及样本统计等。 *例一* 某种植物的高度为常态分布，平均值为 20 cm，标准差为 8 cm。学生应知道一包含 10 棵该种植物随机样本的平均值亦为一正态分布，且平均值为 20 cm，标准差为 $\frac{8}{\sqrt{10}}$ cm。 *例二* 已知 3% 的灯泡会在运送途中损毁。现运送 1 000 个灯泡，求多于 5% 的灯泡损毁的概率。在这个例子中教师可引导学生考虑损毁灯泡的数目 x 。而 X 是一二项分布，即 X ~ B(1 000, 0.03)。这分布近似常态分布，即 X ~ N((0.03)(1 000), (1 000)(0.03)(0.97))。学生不难理解所求的概率等于 $P(X > 49.5)$。另外，教师亦可引用样本比例的概念： $P_S = \frac{X}{n}$ ，它的分布近似 $P_S \sim N\left(P, \frac{pq}{n}\right)$，其中 $q = 1 - p$ 此时所求概率等于 $P\left(P_S \geq 0.0495\right)$。
21.2 利用随机样本估计总体平均值	5	在这阶段，教师应介绍利用样本统计去估计总体未知参数的概念，教师可举例作示范：例如利用样本平均值 $\bar{x}$ 去估计总体平均值 μ 等。教师须指出，同样的参数可有不同的样本统计作估计量。例如样本平均值、中位数和众数等，均可用作总体平均值的估计量。因此，学生须知道，估计总体参数 (β) 的估计量很多，但最佳估计量 (b) 须具备以下两个条件： (1) 无偏性，即 $E(b) = \beta$ 及 (2) b 的方差为最小。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
		例一 设总体的平均值为 μ，方差为 σ^2、X_1、X_2、X_3 为随机样本。 令 $T_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$ 、$T_2 = \frac{X_1 + 2X_2}{3}$ 、$T_3 = \frac{X_1 + 2X_2 + 3X_3}{3}$ 。 T_1、T_2 及 T_3 均为 μ 的估计量。 学生不难计算得 μ 的无偏估计量为 T_1 及 T_2 而 T_1 为 T_1、T_2 及 T_3 三者之中的最佳估计量。 *例二* 两个大小为 n 及 $3n$ 的随机样本分别取自两个常态分布。前者的平均值为 μ，方差为 σ^2。后者的平均值为 3μ，方差为 $3\sigma^2$。若 $\bar{X}_1$ 及 $\bar{X}_2$ 分别为两者的样本平均值，且 $a + 3b = 1$，试证明 $a\bar{X}_1 + b\bar{X}_2$ 为 μ 的无偏估计值。 学生须知道样本平均值 $\bar{x}$ 是总体平均值的最有效估计量。但是，他们无须知道上述性质的证明。 *例三* 以下 7 个样本均取自一随机样本： 9.30, 9.61, 8.27, 8.90, 9.14, 9.90, 9.10 总体平均值的最有效估计为 $$\frac{\sum x}{n} = \frac{9.30 + 9.61 + \ldots + 9.10}{7} \approx 9.17$$ *例四* 设一颗不公正骰子掷出「6」的概率为 p。小平欲试验 p 的值，于是将骰子投掷 100 次并纪录得出现「6」的次数为 20。小惠独立地进行同一试验。她将骰子投掷 200 次并纪录得到 50 个「6」的出现次数。学生须懂得利用公式 $E\left(P_S\right) = p$ 计算小平和小惠所求得 p 的估值。对于能力较高的学生，教师可引导他们利用合并方法改善两人所得的估值。 (p 的合并估计值可以由公式 $\hat{p} = \frac{n_1 P_{S_1} + n_2 P_{S_2}}{n_1 + n_2}$ 求出)

内容	时间分配	教学建议
21.3 已知方差的常态分布的平均值的置信区间	6	教师应指出，总体参数区间估计是建立一区间使它包含未知参数的概率等于一规定数值。学生须认识 95% 及 99% 置信区间为常用置信区间。 教师须示范如何在已知方差 σ^2 的情况下，利用置信区间来估计常态分布的平均值。学生应了解当样本数目为 n 时，样本平均值 $\bar{X}$ 为常态分布，其平均值为 μ，方差为 $\frac{\sigma^2}{n}$。经标准化后，$Z=\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ 且 $Z\sim N(0, 1)$。学生该知道，$N(0, 1)$ 的中央 95% 数据位于 ±1.96 之间，即 $P(-1.96\le\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\le1.96)=0.95$ 或 $P(\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\mu\le\bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=0.95$ 因此，当 $\bar{x}$ 为 $\bar{X}$ 的函数值时， $\left(\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ 为 μ 的一个 95% 置信区间。 *例一* 12 个样本的质量（以 g 作单位）为 200, 204, 196, 198, 210, 189, 197, 221, 205, 203, 196, 199 若这些样本取自一标准差为 10 g 的正态分布，试计算平均质量的 95% 置信区间。 *例二* 一部机器生产 10 000 件物品，其 300 件不合规格。当计算不合规格概率 p 的 95% 置信区间时，教师须引导学生以 $\frac{300}{10\,000}$ 作为 p 的估值，又以 $\frac{\left(\frac{300}{10\,000}\right)\left(\frac{9\,700}{10\,000}\right)}{10\,000}$ 为 $\frac{pq}{n}$ 的估值。 利用近似分布 $P_s\sim N\left(P, \frac{pq}{n}\right)$，学生可用同样方法解决这类问题。

内容	时间分配	教学建议
21.4 假设被验	6	教师可以利用生活上的例子来介绍假设检验的概念，例如抽取一些样本来决定某种灯泡的平均寿命是否不少于 2 000 小时等。教师应清楚解释及举例说明「零假设」、「备择假设」、「显著性水平」等名词及它们的常用符号，(即 H_0、H_1 及 α)。此外，学生亦须认识「临界点」、「临界域」、「接受区域」及「否定区域」等名称。以下是一些典型例子。 *例一* 由一部机器生产的铁钉长度为常态分怖，方差为 0.26 mm^2。原先设定机器生产出来的铁钉长 30 mm。最近怀疑机器出现故障，经抽取 50 个样本发现机钉的平均长度为 30.2 mm。 *(a)* 以 5% 的显著性水平，检验铁钉长度的平均值为 30 mm 这一假设是否真确。 *(b)* 以 5% 的显著性水平，检验铁钉的长度的平均值是否大于 30 mm。 教师可与学生讨论如何设定问题 *(a)* 及 *(b)* 的备择假设，从而导出单尾检验及双尾检验的概念如下： *(a)* 双尾检验  现时 $\mu_0 = 30$, $\alpha = 0.05$

内容	时间分配	教学建议
		(b) 单尾检验  *例二* 某种牌子的狗只罐装食物制造商宣称在各种同类食物中，75% 的幼犬喜爱他制造的一种牌子。现随机抽出 200 只幼犬，发现 135 只选择这牌子的食物。以 5% 的显著性水平，试检验制造商所宣传的真确性。 在这例子中，教师须指出幼犬的百分率可视作成功比例 P_s，且它的分怖近似 $P_S \sim N\left(P, \frac{pq}{n}\right)$。
21.5 I 型及 II 型误差	6	当学生已熟习假设检验的运作后，教师可引导学生达至如下表所列的四个可能发生的结果：

真实情况	检验结果	备注
1. H_0 为真	接受 H_0	正确决定
2. H_0 为真	否定 H_0	产生 I 型误差
3. H_0 为假	接受 H_0	产生 II 型误差
4. H_0 为假	否定 H_0	正确决定

内容	时间分配	教学建议
		学生容易发觉： P(I 型误差) = P(否定 H_0 | H_0 为真) 及 P(II 型误差) = P(接受 H_0 |H_0 为假)。 以下是一些典型的例子： *例一* 已知一个箱子载着 (H_0) 10 个白球和 90 个黑球或 (H_1) 50 个白球和 50 个黑球。为了检验 H_0 及 H_1 这两个假设，从箱子中抽出 4 个球 (抽出的球不放回箱中)。若抽出的全部是黑球，我们便接受假设 H_0，否则否定 H_0。 在此例中，学生应利用上面的关系求得触犯 I 型及 II 型误差的概率。 *例二* 现将一些材料混合，制造出能承受 2 000 N 重力的混凝土。若制造出来的混凝土只能承受少于 1 800 N 的重力时我们便须改变材料的成份。已知混凝土的承受力的标准差为 200 N。 现抽取一些样本检验以下两假设 H_0： μ = 2 000 N H_1： μ = 1 800 N 试求样本数目，使 P(I 型误差) = 0.05 P(II 耳目误差)=0.1 *例三* 以一个质量 10 kg 的样本，检验一量重器的刻度 25 次。设每次检验结果是互相独立的常态分布，且标准差为 0.200 kg。设 μ 为量重器的真实读数。 *(a)* 试说明应检验的假设。

内 容	时 间 分 配	教 学 建 议
		(b) 若发现 $\bar{x} \geq 10.1032$ 或 $\bar{x} \leq 9.8968$，我们便须将量重器更换刻度。试求在无必要的情况下，更改刻度的概率，并说明所产生的误差名称。 *(c)* 试分别就 $\mu = 10.1$ 及 $\mu = 9.8$ 的情况，在无必要的情况下更改刻度的概率，并说明所产生的误差名称。
	27	